DN7 : La méthode de Newton

Leçons : 217, 218, 432, 443 ; Référence : NDEM + NROU

Notations : On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et a un point dans l'intérieur de I

Théorème 1 : (Méthode de Newton) Soit f une application non affine de I vers $\mathbb{R}$ de classe C^2 sur I telle que $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$, $\exists r > 0$ tel que f' ne s'annule pas sur $S = [a-r, a+r]$ et si l'on note $M = \frac{\text{Max}_S|f''|}{2.\text{Min}_S|f'|}$ alors $\forall x_0 \in I$ tel que $|a - x_0| \leq \text{Min}\left\{r, \frac{1}{M}\right\}$ la suite définie par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge quadratiquement vers a

• Avec $\varepsilon \in \left]0, |f'(a)|\right[$ en utilisant la continuité de f' en a on sait que $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in [a-r, a+r], |f'(x) - f'(a)| < \varepsilon$ et il vient $|f'(a)| - |f'(x)| < \varepsilon$ avec la seconde inégalité triangulaire puis $|f'(x)| > |f'(a)| - \varepsilon > 0$ ce qui prouve que f' ne s'annule pas sur $S = [a-r, a+r]$, de plus comme S est compact et que f'' et f' sont continues sur S on peut noter $M = \frac{\text{Max}_S|f''|}{2.\text{Min}_S|f'|}$ et puisque f n'est pas affine on peut noter $h \in \left]0, \text{Min}\left\{r, \frac{1}{M}\right\}\right[$

• D'après le point précédent on peut noter $\forall x \in S, \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et on a alors $\varphi(x) - a = \frac{f'(x)(x-a)-f(x)}{f'(x)}$ mais d'après la formule de Taylor avec reste intégral on a $0 = f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \int_x^a (a-t).f''(t).dt$ donc $f'(x)(x-a) - f(x) = \int_x^a (a-t).f''(t).dt \leq \text{Max}_S|f''|.\int_x^a (a-t).dt = \text{Max}_S|f''|.(a-x)^2/2$ et l'on déduit que $|\varphi(x) - a| \leq \text{Max}_S|f''|.(a-x)^2/(2.f'(x)) \leq M.|x-a|^2$

• On remarque que $S' = [a-h, a+h] \subset S$ est stable par φ puisque on a $\forall x \in S', |\varphi(x) - a| \leq M.|x-a|^2 \leq M.h^2 \leq h$ d'après le point précédent, on peut donc définir pour $x_0 \in S'$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \varphi(x_n)$ et on a alors $|x_{n+1} - a| \leq M.|x_n - a|^2$ puis $y_{n+1} \leq y_n^2$ en posant $y_n = M.|x_n - a|$, il vient par récurrence $y_n \leq y_0^{(2^n)} \leq (Mh)^{(2^n)}$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quadratiquement vers a

Propriété 1 : Soit f une application de I vers $\mathbb{R}$ de classe C^2 sur I telle que $f(a) = 0$ et $f'(a) > 0$, si on a $f'' > 0$ sur I alors $\forall x_0 \in I$ tel que $x_0 \geq a$ la suite définie par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge quadratiquement vers a

On a f' qui est croissante sur I et comme $f'(a) > 0$ il vient $f' > 0$ sur $S = [a, x_0]$, on déduit que f est croissante sur S et avec $f(a) = 0$ il vient $f \geq 0$ sur S, on peut noter $\forall x \in S, \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x$ et en reprenant la preuve du théorème 1 on obtient $|\varphi(x) - a| \leq M.|x-a|^2$ avec $M = \frac{\text{Max}_S|f''|}{2.\text{Min}_S|f'|}$ et $\varphi(x) - a = \frac{1}{f'(x)}.\int_x^a (a-t).f''(t).dt \geq 0$, on déduit que $a \leq \varphi(x) \leq x$ puis que S est stable par φ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée, en utilisant le théorème de la limite monotone et la continuité de φ on sait alors que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de φ qui ne peut être que a, de plus l'inégalité $|x_{n+1} - a| \leq M.|x_n - a|^2$ montre que la convergence est quadratique

---

DEVELOPPEMENT SOUS LA FORME D'UN EXERCICE :

Soit f une application non affine de I vers $\mathbb{R}$ de classe C^2 sur I telle que $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$

1) Montrer que $\exists r > 0$ tel que f' ne s'annule pas sur $S = [a-r, a+r]$
2) Montrer que si on note $\forall x \in S, \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et $M = \frac{\text{Max}_S|f''|}{2.\text{Min}_S|f'|}$ alors $\forall x \in S, |\varphi(x) - a| \leq M.|x-a|^2$
3) Montrer que si on note $h = \text{Min}\left\{r, \frac{1}{M}\right\}$ et $S' = [a-h, a+h]$ alors S' est stable par φ et inclus dans S
4) Montrer que si on note $x_0 \in S'$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \varphi(x_n)$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quadratiquement vers a
5) Montrer que si $f'(a) > 0$ et si $f'' > 0$ sur I alors $\forall x_0 \in I$ tel que $x_0 \geq a$ la suite récurrente définie telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge quadratiquement vers a